РАЗДЕЛ I.
МАТЕМАТИКА

УДК 519.683.5

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-08-14

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Усенов И.А.

Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына,
720033, г. Бишкек, ул. Фрунзе, д. 547, Кыргызстан

Аннотация. В работе предлагается метод малого параметра для регуляризации решения нового класса нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве. Доказана сходимость регуляризированного решения к точному решению исходного уравнения. Получен выбор параметра регуляризации в зависимости от погрешности правой части. Получена оценка скорости сходимости регуляризированного решения к точному решению.

Ключевые слова: оператор, регуляризация, условие Липшица, параметр регуляризации, сходимость, пространство Гильберта.

CONSTRUCTION OF AN APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN A HILBERT SPACE

I. Usenov

Zhusup Balasagyn Kyrgyz National University, *ul. Frunze 547, 720033 Bishkek, Kyrgyzstan*

Abstract. A method of a small parameter is proposed for the regularization of a new class of solutions of nonlinear operator equations of the first kind in a Hilbert space. The convergence of the regularized solutions to the exact solution of the original equation is proved. The regularization parameter, depending on the error in the right-hand side, is selected. The rate of convergence of the regularized solutions to the exact solution is estimated.

Key words: operator, regularization, Lipschitz condition, regularization parameter, convergence, Hilbert space.

1. Постановка задач

В гильбертовом пространстве H рассмотрим нелинейное операторное уравнение первого рода вида:

$$Az = u + BK(z), \tag{1}$$

где:

1. A – линейный непрерывный самосопряженный положительный оператор в H;
2. B – линейный вполне непрерывный самосопряженный положительный оператор в H;
3. K – нелинейный оператор, определенный в H, и удовлетворяющий условию Липшица, т.е. для любого $z_1, z_2 \in H$:

$$\|K(z_1) - K(z_2)\| \le N\|z_1 - z_2\|. \tag{2}$$

Допустим, что при $u = u_0$ уравнение (1) имеет единственное решение $z_0 \in H$ и точное решение истокопредставимо в виде:

$$z_0 - K(z_0) = Av_0, \text{ где } v_0 \in H. \tag{3}$$

Предположим, что оператор A^{-1} существует, но не является ограниченным. Тогда решение уравнения (1) не является устойчивым от правой части u, т.к. на практике известно только приближенное значение u, допускается погрешность δ, т.е.

$$\|u_\delta - u_0\| \le \delta \tag{4}$$

Ставится задача: Найти устойчивое решение уравнения (1).

2. Регуляризация решения задачи

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение вида:

$$\alpha z_\alpha + Az_\alpha = u + (\alpha E + B)K(z_\alpha), \tag{5}$$

где α – параметр регуляризации.

В работе [1] доказано, что:

$$\|L_\alpha\| = \left\|(\alpha E + A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{\alpha}. \tag{6}$$

В работе [4] доказано, что для оператора $B_\alpha = \alpha E + B$ имеет место неравенство:

$$\|B_\alpha z\| \le 2\alpha\|z\|. \tag{7}$$

Из операторного уравнения (5) переходим к операторному уравнению вида:

$$z_\alpha = L_\alpha u + L_\alpha B_\alpha K(z_\alpha). \tag{8}$$

Теорема 1. Пусть: 1. для операторов A, B и K выполнены условия 1), 2) и 3); 2. постоянная Липшица для оператора K удовлетворяет условию $N < \frac{1}{2}$. Тогда при любом $u \in H$ и $\alpha > 0$ уравнение (8) имеет единственное решение $z_\alpha \in H$.

Доказательство: Исходя из начального приближения:

$$\tilde{z}_0 = L_\alpha u , \tag{9}$$

строим последовательность элементов $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$z_n = \tilde{z}_0 + K_\alpha(z_{n-1}), \; n = 1,2,\ldots , \; где \;\; K_\alpha(z) = L_\alpha B_\alpha K(z). \tag{10}$$

Если последовательность $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится к некоторому элементу z_α и если оператор $K_\alpha(z)$ непрерывен в точке z_α, то из (10) следует, что z_α является решением уравнения (8). Следовательно, условия, обеспечивающие сходимость последовательности $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, являются условиями существования решения уравнения (8).

Во-первых, покажем, что:

1. элемент $\tilde{z}_0 \in H$ при любом $\alpha > 0$, на самом деле:

$$\|\tilde{z}_0\| = \|L_\alpha u\| \le \frac{1}{\alpha}\|u\| < \infty; \tag{11}$$

2. оператор $K_\alpha : H \to H$ при любом $\alpha > 0$ и ограничен при $\alpha \to 0$. Действительно:

$$\left\|K_\alpha(z)\right\| \le \left\|L_\alpha B_\alpha\left(K(z)-K(0)\right)\right\| + \left\|L_\alpha B_\alpha K(0)\right\| \le 2N\left(\left\|\tilde{z}_0\right\| + \frac{\|K(0)\|}{N}\right); \tag{12}$$

3. оператор K_α при любом $z_1, z_2 \in H$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\left\|K_\alpha(z_1) - K_\alpha(z_2)\right\| \le \left\|L_\alpha B_\alpha\left(K(z_1) - K(z_2)\right)\right\| \le 2N\left\|z_1 - z_2\right\|. \tag{13}$$

Следовательно, при $N < 1/2$ оператор K_α является сжимающим.

Теперь оценим $\left\|z_{n+1} - z_n\right\|$. Используя оценку (13), из (10) имеем:

$$\left\|z_{n+1} - z_n\right\| \le \left\|L_\alpha B_\alpha K(z_n) - L_\alpha B_\alpha K(z_{n-1})\right\| \le 2N\left\|z_n - z_{n-1}\right\|, \text{ где } q = 2N < 1. \tag{14}$$

Продолжая оценку (14) и используя (12), окончательно получаем:

$$\left\|z_{n+1} - z_n\right\| \le q^{n+1}\left(\left\|\tilde{z}_0\right\| + \frac{\|K(0)\|}{N}\right). \tag{15}$$

Далее покажем, что последовательность $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ является фундаментальной последовательностью. Действительно для любого n и p имеем, используя неравенство треугольника и (15):

$$\left\|z_{n+p} - z_n\right\| \le \left\|z_{n+p} - z_{n+p-1}\right\| + \left\|z_{n+p-1} - z_{n+p-2}\right\| + \ldots + \left\|z_{n+1} - z_n\right\| \le \left(q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \ldots + q^n\right)\left(\left\|\tilde{z}_0\right\| + \frac{\|K(0)\|}{N}\right).$$

Используя сумму геометрической прогрессии, имеем в силу $q < 1$:

$$\left\|z_{n+p} - z_n\right\| \le q^n \frac{1-q^p}{1-q}\left(\left\|\tilde{z}_0\right\| + \frac{\|K(0)\|}{N}\right). \tag{16}$$

В силу полноты пространства H существует:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_\alpha. \tag{17}$$

Зафиксируем в неравенстве (16) индекс n и устремим p к бесконечности. Тогда получаем оценку:

$$\left\|z_{n+p} - z_n\right\| \le \frac{q^n}{1-q}\left(\left\|\tilde{z}_0\right\| + \frac{\|K(0)\|}{N}\right). \tag{18}$$

Полученная оценка утверждает: приближения z_n сходятся к z_α со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, используя непрерывность оператора K_α и (18), из (10) имеем:

$$z_\alpha = \tilde{z}_0 + K_\alpha(z_\alpha). \tag{19}$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1; 2) точное решение представимо в виде (3). Тогда решение z_α^0 уравнения (8) при $u = u_0$ сходится к точному решению z_0 уравнения (1) при $\alpha \to 0$.

Доказательство: Решение уравнения (8) в силу формулы (19) представимо в виде:

$$z_\alpha^0 = L_\alpha u_0 + K_\alpha\left(z_\alpha^0\right). \tag{20}$$

По предположению точное решение $z_0 \in H$ представимо в виде:

$$z_0 = A^{-1}u_0 + A^{-1}BKz_0\,. \tag{21}$$

Вычитая из (20) (21) и используя тождество $u_0 \equiv Az_0 - BKz_0$, имеем:

$$z_\alpha^0 - z_0 = L_\alpha u_0 + K_\alpha\left(z_\alpha^0\right) - A^{-1}u_0 - A^{-1}BK\left(z_0\right) = -\alpha L_\alpha\left(z_0 - K(z_0)\right) + L_\alpha B_\alpha\left(K(z_\alpha^0) - K(z_0)\right) \tag{22}$$

Используя (3), из (22) имеем:

$$z_\alpha^0 - z_0 = -\alpha L_\alpha A v_0 + L_\alpha B_\alpha\left(K(z_\alpha^0) - K(z_0)\right). \tag{23}$$

Оценим разность $z_\alpha^0 - z_0$:

$$\left\|z_\alpha^0 - z_0\right\| = \left\|\alpha L_\alpha A v_0\right\| + \left\|L_\alpha B_\alpha\left(K(z_\alpha^0) - K(z_0)\right)\right\| \le \alpha\left\|v_0\right\| + 2N\left\|z_\alpha^0 - z_0\right\|. \tag{24}$$

Учитывая, что $N < 1/2$, из (24) имеем:

$$\left\|z_\alpha^0 - z_0\right\| \le \frac{\alpha\left\|v_0\right\|}{1-2N}. \tag{25}$$

Из оценки (25) следует, что при $\alpha \to 0$ $z_\alpha^0 \to z_0$ по норме пространства *H*. Скорость сходимости удовлетворяет условию (25). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть: 1. выполнены все условия теоремы 2; 2. правая часть u удовлетворяет неравенству (4); 3. зависимость параметра регуляризации α от погрешности правой части δ определяется по закону $\alpha(\delta) = o(\sqrt{\delta})$. Тогда решение уравнения z_α^δ (8) при $u = u_\delta$ сходится к точному решению z_0 уравнения (1) при $\delta \to 0$.

Доказательство: Решение уравнения (8) при $u = u_\delta$ в силу формулы (19) представимо в виде:

$$z_\alpha^\delta = L_\alpha u_\delta + K_\alpha\left(z_\alpha^\delta\right). \tag{26}$$

Используя неравенство треугольника, имеем:

$$\left\|z_\alpha^\delta - z_0\right\| \le \left\|z_\alpha^\delta - z_\alpha^0\right\| + \left\|z_\alpha^0 - z_0\right\|. \tag{27}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (27):

$$\left\|z_\alpha^\delta - z_\alpha^0\right\| \le \left\|L_\alpha(u_\delta - u_0)\right\| + \left\|L_\alpha B_\alpha\left(K(z_\alpha^\delta) - K(z_\alpha^0)\right)\right\| \le \frac{\delta}{\alpha} + 2N\left\|z_\alpha^\delta - z_\alpha^0\right\|. \qquad (28)$$

Отсюда при $N < 1/2$, имеем:

$$\left\|z_\alpha^\delta - z_\alpha^0\right\| \le \frac{\delta}{\alpha} \cdot \frac{1}{1-2N}. \qquad (29)$$

Тогда в силу неравенств (25) и (29), из (27) имеем:

$$\left\|z_\alpha^\delta - z_0\right\| \le \frac{1}{1-2N}\left(\frac{\delta}{\alpha} + \alpha\left\|v_0\right\|\right). \qquad (30)$$

Минимизируя правую часть неравенства (30), определяем зависимость параметра регуляризации α от погрешности δ, т.е.

$$\alpha(\delta) = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \cdot \sqrt{\delta}, \text{ где } \frac{1}{1-2N} = c_1; \quad \left\|v_0\right\| \cdot c_1 = c_2. \qquad (31)$$

Найденное значение α подставим в правую часть (30), имеем

$$\left\|z_{\alpha(\delta)}^\delta - z_0\right\| \le 2\sqrt{c_1 \cdot c_2} \cdot \sqrt{\delta}. \qquad (32)$$

Отсюда следует, что при $\delta \to 0$ $z_{\alpha(\delta)}^\delta \to z_0$ по норме пространства H, и $z_{\alpha(\delta)}^\delta$ является приближенным устойчивым решением уравнения (1).

Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (32).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: 1962. 96 с.
2. Саадабаев А. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода. Бишкек: 1997. 218 с.
3. Усенов И.А. Метод малого параметра для регуляризации решения нелинейного операторного уравнения первого рода // Исслед. по интегр.-дифф. урав. вып. №40. Бишкек: 2009. С.114-120.

REFERENCES

1. Lavrent'ev M.M. O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoi fiziki [Some incorrect problems of mathematical physics]. Novosibirsk, 1962. 96 p.
2. Saadabaev A. Priblizhennye metody resheniya nelineinykh integral'nykh i operatornykh uravnenii 1-go roda [Approximate methods for solving nonlinear integral and operator equations of the 1st kind]. Bishkek, 1997. 218 p.

3. Usenov I.A. Metod malogo parametra dlya regulyarizatsii resheniya nelineinogo operatornogo uravneniya pervogo roda [Method of a small parameter for the regularization of solutions of the nonlinear operator equation of the first kind] // Issledovaniya po integral'no-differentsial'nym uravneniyam. Vyp. 40. Bishkek, 2009. pp. 114–120.

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Усенов Изат Абдраевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына;
e-mail: iausen@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Usenov Izat Abdraevich - candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the Chair of Differential Equations at the Zhusup Balasagyn Kyrgyz National University;
e-mail: iausen@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Усенов И.А. Построение приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 4. С. 8–14.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-08-14.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

*I. Usenov***.** Construction of an approximate solution of nonlinear operator equations of the first kind in a Hilbert space // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 1. pp. 8–14.
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-08-14.