

УДК 539.23+539.216.1+537.311.31
DOI: 10.18384/2310-7251-2016-2-74-84

РАСЧЕТ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ВНУТРИ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРОВОЛОКИ ИЗ МЕТАЛЛА

Завитаев Э.В., Русаков О.В., Харитонов К.Е.

*Государственный гуманитарно-технологический университет (ГГТУ)
164010, Московская обл., г. Орехово-Зуево, ул. Зелёная, д. 22.*

Аннотация. Выполнен расчет магнитной индукции внутри прямой металлической проволоки круглого сечения. Рассмотрен общий случай, когда отношение длины свободного пробега электронов к радиусу проволоки может принимать произвольные значения. В качестве граничных условий задачи принято условие зеркально-диффузного отражения электронов от внутренней поверхности проволоки. Рассмотрен предельный случай и проведено обсуждение полученных результатов.

Ключевые слова: тонкая проволока, плотность тока, магнитная индукция.

CALCULATION OF THE MAGNETIC INDUCTION IN A THIN CYLINDRICAL METAL WIRE

E. Zavitaev, O. Rusakov, K. Kharitonov

Moscow Regional Institution of Higher Education 'University for Humanities and Technologies', ul. Zelenaya 22, 164010 Orekhovo-Zuyevo, Moscow region, Russia

Abstract. The magnetic induction in a direct metal wire of round section is calculated. The general case is considered when the relation of a free run length of electrons to the radius of a wire can accept arbitrary values. As boundary conditions of the problem, we accept the condition of mirror and diffusion reflection of electrons from the internal surface of the wire. The limiting case is considered and the obtained results are discussed.

Keywords: thin wire, current density, magnetic induction.

Введение

Электрические и магнитные свойства проводников, линейный размер которых сравним с длиной свободного пробега электронов Λ , существенно отличаются от свойств «массивных» проводящих объектов [1].

Вопросы, касающиеся расчета электрической проводимости тонких проволок, обсуждались в работах [2–7]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов в металле или полупроводнике.

В настоящей работе кинетическим методом рассчитана функция распределения, описывающая линейный отклик электронов в цилиндрической проволоке из металла на переменное электрическое поле, ориентированное вдоль её оси симметрии. По найденной функции распределения удастся рассчитать зависимость магнитной индукции внутри проволоки как функцию текущего расстояния, отсчитываемого от оси симметрии.

Постановка задачи

Рассматривается цилиндрическая проволока из немагнитного металла (относительная магнитная проницаемость $\mu \approx 1$) радиуса R и длины L (считаем, что $L \gg R$), к концам которой приложено переменное электрическое напряжение частоты ω . Принимается, что направление электрического поля совпадает с осью цилиндра. Скин-эффект не учитывается (предполагается, что $R < \gamma$ – глубины скин-слоя).

Однородное периодическое по времени электрическое поле, вектор напряженности которого:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t), \quad (1)$$

воздействует на электроны проводимости внутри проволоки и вызывает появление внутри неё высокочастотного тока с плотностью \mathbf{j} .

Связь между \mathbf{E} и \mathbf{j} в случае, когда радиус проволоки R сравним с длиной свободного пробега электронов в металле Λ или меньше её: $R < \Lambda$, оказывается существенно нелокальной. Для описания этой связи применим кинетическое уравнение (в приближении времени релаксации) к вырожденному ферми-газу электронов, находящемуся внутри проволоки.

Для достаточно слабых внешних полей это уравнение можно линеаризовать по внешнему полю \mathbf{E} и по малым отклонениям $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ от равновесной фермиевской функции распределения f_0 [8–10]:

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v} \mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}. \quad (2)$$

Здесь e и \mathbf{v} – соответственно, заряд и скорость электронов; τ – электронное время релаксации.

Далее рассматривается квадратичная зависимость энергии электронов ε от скорости: $\varepsilon = mv^2/2$ (m – эффективная масса электрона) и используется ступенчатая аппроксимация для равновесной функции распределения электронов по энергиям $f_0(\varepsilon)$ [8]:

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_F, \\ 0, & \varepsilon_F < \varepsilon \end{cases}$$

где $\varepsilon_F = mv_F^2/2$ – энергия Ферми (v_F – скорость Ферми). Предполагается, что поверхность Ферми имеет сферическую форму.

Функция распределения электронов

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{m v^2}{2}.$$

Отклонение $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ функции распределения электронов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ от равновесного значения $f_0(\varepsilon)$, возникающее под действием электрического поля (1), позволяет рассчитать плотность высокочастотного тока внутри проволоки:

$$\mathbf{j} = en\langle \mathbf{v} \rangle = en \left[\int f_0 d^3v \right]^{-1} \int f_1 \mathbf{v} d^3v. \quad (3)$$

Концентрация электронов n в проволоке определяется по стандартной формуле, согласно которой:

$$n = 2 \frac{m^3}{h^3} \int f_0 d^3v = 2 \frac{m^3}{h^3} \frac{4\pi v_F^3}{3}, \quad (4)$$

где h – постоянная Планка.

Взяв в уравнении (2) поле \mathbf{E} в виде (1), найдём $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ как решение этого уравнения. Затем, используя выражение (3), определим плотность тока и стандартным образом рассчитаем магнитную индукцию внутри проволоки.

Однозначное решение поставленной задачи возможно при выборе граничного условия для неизвестной функции $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ на цилиндрической

поверхности металлической проволоки. В качестве такового принимаем условие зеркально-диффузного отражения электронов от поверхности [8]:

$$f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp, \mathbf{v}_z) = q f_1(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}'_\perp, \mathbf{v}_z) \text{ при } \begin{cases} |\mathbf{r}_\perp| = R, \\ \mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp < 0 \end{cases},$$

где \mathbf{v}_\perp и \mathbf{r}_\perp – соответственно, компоненты радиус-вектора электрона \mathbf{r} и его скорости \mathbf{v} в плоскости перпендикулярной оси симметрии проволоки:

$$\mathbf{v}'_\perp = \mathbf{v}_\perp - \frac{2\mathbf{r}_\perp(\mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp)}{R^2},$$

вектор скорости, который при зеркальном отражении от внутренней поверхности проволоки в точке $\mathbf{r}_\perp(|\mathbf{r}_\perp| = R)$ переходит в вектор \mathbf{v}'_\perp ; \mathbf{v}_z – составляющая скорости электрона вдоль оси симметрии проволоки; q – коэффициент зеркальности (вероятность зеркального отражения): $0 \leq q \leq 1$.

При $q = 0$ получаем условие диффузного отражения электронов проводимости от внутренней поверхности металлической проволоки, а при $q = 1$ условие чисто зеркального отражения. При значениях $q \neq 0$ и $q \neq 1$ получаем различные варианты смешанного (зеркально-диффузного) отражения электронов.

Расчет магнитной индукции

Решение кинетического уравнения (2) и расчёт плотности тока (3) проведены в работе [3].

При вычислении интеграла (3) и расчете магнитной индукции удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат $(r_\perp, \varphi, Z$; полярная ось – ось Z ; вектор \mathbf{E}_0 параллелен оси Z), так и в пространстве скоростей $(v_\perp, \alpha, v_z$; полярная ось – ось v_z). Ось симметрии проволоки совпадает с осью Z .

Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь z -компоненту:

$$\mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z; \quad E_z = E_0 \exp(-i \omega t).$$

Соответственно, и плотность тока (3) обладает лишь z -компонентой (линии тока являются прямыми параллельными оси Z) и вычисляется по формуле [3]:

$$\mathbf{j}_z = \frac{3n e^2 R E_z}{\pi v_F m} \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\rho \sqrt{1-\rho^2}}{v} \left\{ \frac{(q-1) \exp(-v \eta / \rho)}{1-q \exp(-v \eta_0 / \rho)} + 1 \right\} d\rho d\alpha, \quad (5)$$

где

$$\rho = \frac{v_{\perp}}{v_F}, \quad v = \left(\frac{1}{\tau} - i\omega \right) \frac{R}{v_F}, \quad \eta_0 = 2\sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha},$$

$$\eta = \xi \cos \alpha + \sqrt{1 - \xi^2 \sin^2 \alpha}, \quad \xi = \frac{r_{\perp}}{R}$$

Здесь мы учли, что концентрация электронов проводимости в металлах определяется выражением (4).

Для расчёта вектора магнитной индукции \mathbf{B} внутри тонкой цилиндрической проволоки будем применять теорему о циркуляции с учётом того факта, что распределение тока по поперечному сечению является неоднородным (линии индукции являются замкнутыми окружностями, лежащими в плоскостях, перпендикулярных к оси симметрии проволоки, поэтому $\mathbf{B} = B_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi}$):

$$\oint_L \mathbf{B}_{\varphi} d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}_z dS$$

(μ_0 – магнитная постоянная вакуума).

После применения теоремы к контуру в виде окружности, получаем:

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0}{r_{\perp B}} \int_0^{r_{\perp B}} \mathbf{j}_z r_{\perp} dr_{\perp}$$

Для дальнейших вычислений и анализа результатов, введём новые переменные:

$$\delta = \frac{r_{\perp B}}{R}, \quad x = \frac{R}{\tau v_F} = \frac{R}{\Lambda}, \quad y = \omega \frac{R}{v_F},$$

где δ – «безразмерный радиус индукции», x – безразмерная обратная длина свободного пробега электронов, y – безразмерная частота электрического поля.

Тогда магнитную индукцию можно рассчитать по формуле:

$$B_{\varphi} = \frac{\mu_0 R}{\delta} \int_0^{\delta} \mathbf{j}_z \xi d\xi$$

или, с учетом (5),

$$B_{\varphi} = \frac{3\mu_0 n e^2 R^2 E_z}{\pi v_F m \delta} \int_0^{\delta} \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{\rho \sqrt{1 - \rho^2}}{\nu} \left\{ \frac{(q - 1) \exp(-\nu \eta / \rho)}{1 - q \exp(-\nu \eta_0 / \rho)} + 1 \right\} \xi d\xi d\rho d\alpha. \quad (6)$$

Магнитную индукцию (6) (заметим, что она является комплексной величиной) представим в виде:

$$B_{\varphi} = B_0 N(\delta, x, y, q),$$

где

$$B_0 = \frac{3 \mu_0 n e^2 R^2 E_z}{\pi v_F m},$$

$$N(\delta, x, y, q) = \int_0^\delta \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\rho \sqrt{1-\rho^2}}{v \delta} \left\{ \frac{(q-1) \exp(-v \eta / \rho)}{1-q \exp(-v \eta_0 / \rho)} + 1 \right\} \xi d\xi d\rho d\alpha.$$

Численный расчет модуля $M(\delta, x, y, q)$ и аргумента $A(\delta, x, y, q)$ (фазы) безразмерной магнитной индукции $N(\delta, x, y, q)$ вытянутой цилиндрической проволоки представлен на рисунках ниже.

Обсуждение результатов

В пределе чисто зеркального отражения электронов на границе металлической проволоки ($q=1$) для расчета магнитной индукции получаем выражение:

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 n e^2 R^2 E_z \delta}{2 v_F m v}. \quad (7)$$

Выражение (7) соответствует классическому макроскопическому результату для цилиндрической проволоки, когда при расчете магнитной индукции применяется локальный закон Ома, в котором удельная проводимость проволоки определяется по формуле Друде [3]. Это связано с тем, что при $q=1$ граница проволоки не оказывает влияния на функцию распределения электронов $f(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{v}_\perp, v_z)$. Высокочастотный ток внутри зеркально отражающей металлической проволоки удовлетворяет локальному закону Ома при любом соотношении между радиусом проволоки R и длиной свободного пробега электронов Λ . Таким образом, при зеркальном отражении отсутствуют нелокальные (поверхностные) эффекты.

Независимо от характера отражения электронов на границе (при любых q) с ростом размера проволоки (при $x \gg 1$) (в этом случае в формуле (6) можно пренебречь членами с экспонентами в виду их быстрого затухания) также имеет место макроскопическая асимптотика (7).

На рис. 1 приведено сравнение результатов численного расчёта магнитной индукции внутри тонкой цилиндрической проволоки, выполненного с применением кинетического (6) и макроскопического (7) подходов.

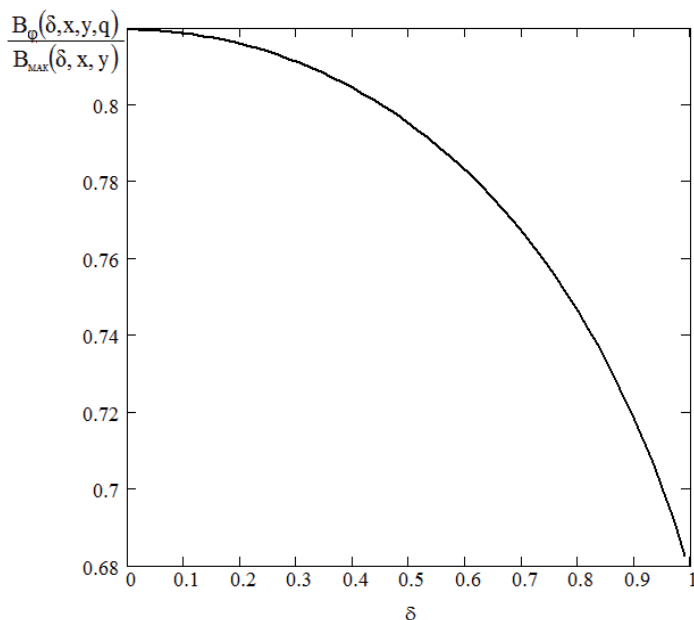


Рис. 1. Зависимость отношения модуля магнитной индукции к модулю магнитной индукции от «безразмерного радиуса индукции» δ при постоянных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x , безразмерной частоты электрического поля y и коэффициента зеркальности электронов q :
($x = 1, y = 0.1, q = 0$).

Отношение модуля магнитной индукции $B_\varphi(\delta, x, y, q)$, вычисленной с помощью кинетической модели, к модулю магнитной индукции $B_{\max}(\delta, x, y, q)$, вычисленной в рамках классической электродинамики, определялось при постоянных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x , безразмерной частоты электрического поля y и коэффициента зеркальности электронов q . Из анализа хода кривой можно сделать вывод о том, что отличие модуля магнитной индукции, рассчитанной с использованием кинетической модели, и модуля магнитной индукции, рассчитанной в рамках классической электродинамики, при фиксированных значениях параметров расчета составляет от 18 до 32 %.

Это обстоятельство подтверждает существенное влияние на абсолютную величину магнитной индукции вклада поверхностных механизмов рассеяния в случае, когда радиус проволоки будет одного порядка с длиной свободного пробега электронов.

На рис. 2 и 3 представлены графики зависимости модуля $M(\delta, x, y, q)$ и аргумента $A(\delta, x, y, q)$ (фазы) безразмерной магнитной индукции цилиндрической проволоки $N(\delta, x, y, q)$ от «безразмерного радиуса индукции» δ для случая, когда все кривые построены при одинаковом значении безразмерной частоты электрического поля y и коэффициента зеркальности электронов q . Безразмерная обратная длина свободного пробега электронов x варьируется для каждой кривой.

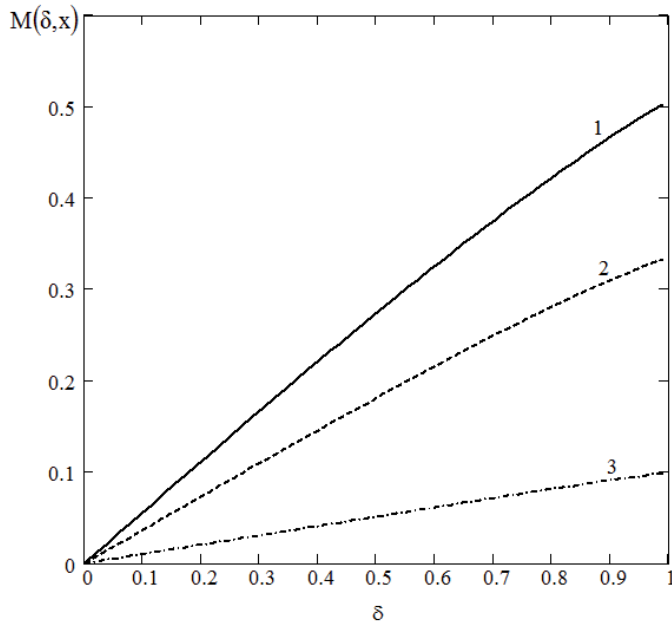


Рис. 2. Зависимость модуля $M(\delta, x, y, q)$ безразмерной магнитной индукции от «безразмерного радиуса индукции» δ при фиксированном значении безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x и постоянных значениях безразмерной частоты электрического поля y и коэффициента зеркальности электронов q :

1 – ($x = 0.1, y = 1, q = 0.5$), 2 – ($x = 1, y = 1, q = 0.5$), 3 – ($x = 5, y = 1, q = 0.5$).

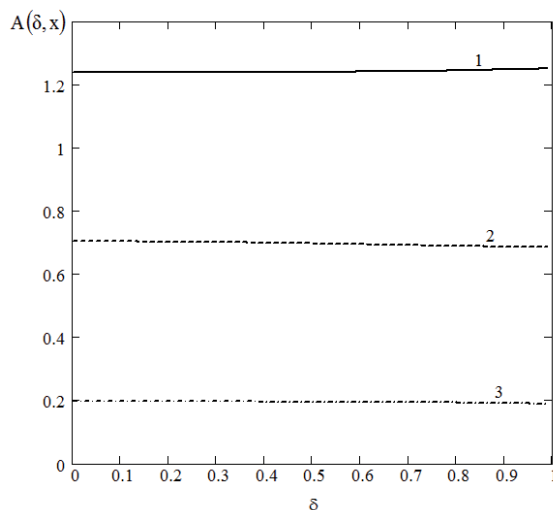


Рис. 3. Зависимость аргумента $A(\delta, x, y, q)$ (фазы) безразмерной магнитной индукции от «безразмерного радиуса индукции» δ при фиксированном значении безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x и постоянных значениях безразмерной частоты электрического поля y и коэффициента зеркальности электронов q :

1 – ($x = 0.1, y = 1, q = 0.5$), 2 – ($x = 1, y = 1, q = 0.5$), 3 – ($x = 5, y = 1, q = 0.5$).

Из хода кривых на рисунках видно, что модуль безразмерной магнитной индукции в значительной степени зависит от текущего расстояния, отсчитываемого от оси симметрии проволоки, тогда как на аргумент (фазу) безразмерной индукции этот параметр практически не влияет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Ю.И. Физика малых частиц. М.: Наука, 1982. 360 с.
2. Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Высокочастотная проводимость тонкой проволоки из металла прямоугольного сечения // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2006. Т. 129. № 5. С. 938–944.
3. Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Высокочастотная проводимость тонкой цилиндрической проволоки из металла // Микроэлектроника. 2008. Т. 37. № 6. С. 429–438.
4. Кузнецова И.А., Юшканов А.А., Хадчукаев Р.Р. Высокочастотная проводимость тонкой полупроводниковой цилиндрической проволоки при произвольной температуре // Физика и техника полупроводников. 2009. Т. 43. Вып. 5. С. 645–650.
5. Кузнецова И.А., Хадчукаев Р.Р., Юшканов А.А. Влияние поверхностного рассеяния носителей заряда на высокочастотную проводимость тонкой цилиндрической

- полупроводниковой проволоки // Физика твердого тела. 2009. Т. 51. Вып. 10. С. 2022–2027.
6. Кузнецова И.А., Чапкин А.В., Юшканов А.А. Влияние механизма поверхностного рассеяния электронов на высокочастотную проводимость тонкой металлической проволоки // Микроэлектроника. 2011. Т. 40. № 1. С. 45–51.
 7. Русаков О.В., Завитаев Э.В., Юшканов А.А. Скин-эффект в тонкой цилиндрической проволоке из металла // Физика твердого тела. 2012. Т. 54. Вып. 6. С. 1041–1047.
 8. Харрисон У. Теория твердого тела. М.: Мир, 1972. 616 с.
 9. Займан Дж. Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962. 488 с.
 10. Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И. Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 415 с.

REFERENCES

1. Petrov Yu.I. Fizika malykh chastits [Physics of small particles]. М., Nauka, 1982. 360 p.
2. Zavitaev E.V., Yushkanov A.A. Vysokochastotnaya provodimost' tonkoi provoloki iz metalla pryamougol'nogo secheniya [High-frequency conductivity of a thin metal wire of rectangular cross section] // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 2006. Vol. 129. no. 5. pp. 938–944.
3. Zavitaev E.V., Yushkanov A.A. Vysokochastotnaya provodimost' tonkoi tsilindricheskoj provoloki iz metalla [High-frequency conductivity of a thin cylindrical metal wire] // Mikroelektron. 2008. Vol. 37. no. 6. pp. 429–438.
4. Kuznetsova I.A., Yushkanov A.A., Khadchukaev R.R. Vysokochastotnaya provodimost' tonkoi poluprovodnikovoi tsilindricheskoj provoloki pri proizvol'noi temperature [High conductivity semiconductor thin cylindrical wire at an arbitrary temperature] // Fiz. Tekhn. Poluprovodn. 2009. Vol. 43. no. 5. pp. 645–650.
5. Kuznetsova I.A., Khadchukaev R.R., Yushkanov A.A. Vliyanie poverkhnostnogo rasseyaniya nositelei zaryada na vysokochastotnyuyu provodimost' tonkoi tsilindricheskoj poluprovodnikovoi provoloki [The effect of surface scattering of charge carriers on the high-frequency conductivity of a thin cylindrical semiconductor wire] // Fiz. Tverd. Tela. 2009. Vol. 51. no. 10. pp. 2022–2027.
6. Kuznetsova I.A., Chapkin A.V., Yushkanov A.A. Vliyanie mekhanizma poverkhnostnogo rasseyaniya elektronov na vysokochastotnyuyu provodimost' tonkoi metallicheskoj provoloki [The influence of the mechanism of surface scattering of electrons on high-frequency conductivity of a thin metal wire] // Mikroelektron. 2011. Vol. 40. no. 1. pp. 45–51.
7. Rusakov O.V., Zavitaev E.V., Yushkanov A.A. Skin-effekt v tonkoi tsilindricheskoj provoloke iz metalla [The skin effect in a thin cylindrical wire of metal] // Fiz. Tverd. Tela. 2012. Vol. 54. no. 6. pp. 1041–1047.

8. Harrison W.A. Solid State Theory. N.Y., McGraw-Hill, 1970.
 9. Ziman J.M. Electrons and Phonons. Oxford: Clarendon Press, 1960.
 10. Lifshits I.M., Azbel' M.Ya., Kaganov M.I. Electron theory of metals. N.Y.: Consultants Bureau, 1973.
-

ИНФОМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Завитаев Эдуард Валерьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики, Государственный гуманитарно-технологический университет;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru;

Русаков Олег Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и физики, Государственный гуманитарно-технологический университет;
e-mail: olegrusmail@mail.ru

Харитонов Кирилл Евгеньевич – лаборант кафедры математики и физики, Государственный гуманитарно-технологический университет;
e-mail: kirillharitonov1@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Zavitaev Eduard Valerjevich – doctor of physical and mathematical sciences, professor of the Department of Mathematics and Physics at the University for Humanities and Technologies;
e-mail: eduardzavitaev@yandex.ru;

Rusakov Oleg Vladimirovich – candidate of physical and mathematical sciences, head lecturer of the Department of Mathematics and Physics at the University for Humanities and Technologies;
e-mail: olegrusmail@mail.ru;

Kharitonov Kirill Evgenjevich – laboratory assistant of the Department of Mathematics and Physics at the University for Humanities and Technologies;
e-mail: kirillharitonov1@mail.ru

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ ССЫЛКА

Завитаев Э.В., Русаков О.В., Харитонов К.Е. Расчет магнитной индукции внутри тонкой цилиндрической проволоки из металла // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. № 2. С. 74–84.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-2-74-84.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCE

E. Zavitaev, O. Rusakov, K. Kharitonov. Calculation of the magnetic induction in a thin cylindrical metal wire // Bulletin of Moscow State Regional University. Series: Physics and Mathematics. 2016. no. 2. pp. 74–84.

DOI: 10.18384/2310-7251-2016-2-74-84.